ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Βρείτε όλες τις λύσεις στο $\mathbb{C}$ της εξίσωσης $z^2 = i$.

ΛΥΣΗ Γράφοντας την εξίσωση $z^2 = i$ σε πολική μορφή και χρησιμοποιώντας τον Τύπο (6), παίρνουμε

$$|z|^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 1(0 + i).$$

Άρα $|z|^2 = 1$, οπότε $|z| = 1$. Η γωνία θ του z πρέπει να ικανοποιεί τις $\cos 2\theta = 0$ και $\sin 2\theta = 1$. Επομένως $2\theta = (\pi/2) + n(2\pi)$, δηλαδή $\theta = (\pi/4) + n\pi$ για κάποιον ακέραιο n. Οι τιμές του n που δίνουν τιμές στο θ, με $0 \leq \theta < 2\pi$, είναι οι 0 και 1, και δίνουν $\theta = \pi/4$ ή $\theta = 5\pi/4$. Οι λύσεις μας είναι

$$z_1 = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{και} \qquad z_2 = 1\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

ή

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) \qquad \text{και} \qquad z_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}(1 + i). \qquad \square$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Βρείτε όλες τις λύσεις της $z^4 = -16$.

ΛΥΣΗ Όπως στο Παράδειγμα 3, γράφουμε την εξίσωση σε πολική μορφή, καταλήγοντας στην

$$|z|^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = 16(-1 + 0i).$$

Επομένως $|z|^4 = 16$ άρα $|z| = 2$, ενώ $\cos 4\theta = -1$ και $\sin 4\theta = 0$. Βρίσκουμε ότι $4\theta = \pi + n(2\pi)$, άρα $\theta = (\pi/4) + n(\pi/2)$ για κάποιον ακέραιο n. Οι διαφορετικές τιμές του θ που παίρνουμε, με $0 \leq \theta < 2\pi$, είναι οι $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$, και $7\pi/4$. Άρα μια λύση της $z^4 = -16$ είναι η

$$2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}(1 + i).$$

Με ανάλογο τρόπο, βρίσκουμε τρεις ακόμα λύσεις, τις

$$\sqrt{2}(-1 + i), \qquad \sqrt{2}(-1 - i), \qquad \text{και} \qquad \sqrt{2}(1 - i). \qquad \square$$